Strömungslehre

Formelsammlung

Wer Gasströmungen misst, rechnet ständig mit denselben Beziehungen. Diese Sammlung stellt sie zusammen – vom Reibungsgesetz bis zur Rohrreibungszahl.

Die neun Kapitel

- **Stoffgrößen** – Dichte, Kompressibilität, Gasgleichung
- **Viskosität** – Reibungsgesetz, Schallgeschwindigkeit
- **Fluidstatik** – Druckverteilung, Manometer, Auftrieb
- **Erhaltungssätze** – Kontinuität und Bernoulli
- **Folgerungen** – Staurohr, Diffusor, Ausfluss
- **Impulssatz** – Kräfte an durchströmten Bauteilen
- **Rohrströmung** – Reynolds, laminar, turbulent
- **Druckverluste** – Verlustziffern der Einbauteile
- **Einheiten** – Umrechnungen und Konstanten

Wie Sie damit arbeiten

Jede nummerierte Formel steht in einem grauen Kasten und trägt rechts ihre Nummer. Darunter führt eine Tabelle jedes Zeichen mit Bedeutung und Einheit.

Die blauen Kästen nennen das Gerät, das auf der jeweiligen Beziehung beruht, und worauf es bei der Anwendung ankommt.

Gerechnet wird durchgängig in SI-Einheiten. Die Umrechnung in bar, mbar und m^3/h steht in Kapitel 9.

WARUM WIR DAS HERAUSGEBEN

Eine Messung ist so gut wie das Modell dahinter.

Wir kalibrieren, messen und bauen Prüfsysteme für Luft und Gase. Diese Physik ist die gemeinsame Sprache mit unseren Kunden.

Zeichen und Vereinbarungen

Größensystem	Durchgängig SI. Drücke sind **Absolutdrücke**, sofern nicht anders bezeichnet.
Geschwindigkeit	c ist die örtliche, $\bar{c}$ die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit. Wo die Unterscheidung entfällt, steht c.
Indizes 1 und 2	Zustand vor und hinter der betrachteten Stelle, in Strömungsrichtung gezählt.

Verzeichnis der Formelzeichen

a	Schallgeschwindigkeit, Beschleunigung	s	Spaltweite, Wandstärke, Weg
A	Fläche, Querschnitt	T	absolute Temperatur
c	Geschwindigkeit	U	benetzter Umfang
$\bar{c}$	mittlere Geschwindigkeit	V, $\dot{V}$	Volumen, Volumenstrom
D	Rohrdurchmesser, Schergefälle	Y_V	spezifische Verlustenergie
d_{hyd}	hydraulischer Durchmesser	z	Höhenkoordinate
E	Kompressionsmodul	α	Kontraktionszahl, Neigungswinkel
F	Kraft	δ	Auftreffwinkel
g	Fallbeschleunigung	η	dynamische Viskosität
H_V	Verlusthöhe	η_D	Diffusorwirkungsgrad
k_s	Sandrauigkeit	ϑ	Temperatur in °C, Öffnungswinkel
K	Kompressibilität	κ	Isentropenexponent
L	Länge	λ	Rohrreibungszahl
m, $\dot{m}$	Masse, Massenstrom	ν	kinematische Viskosität
n	Drehzahl	ρ	Dichte
p	Druck	σ	Spannung in der Wandung
Re	Reynoldszahl	τ	Schubspannung
R, r	Radius	υ	spezifisches Volumen
R_i	spezielle Gaskonstante	ζ	Verlustziffer
		ω	Winkelgeschwindigkeit

Mehrfach belegte Zeichen sind in der Strömungslehre üblich – D steht für den Rohrdurchmesser und für das Schergefälle, a für die Schallgeschwindigkeit und für eine Beschleunigung. Welche Bedeutung gilt, sagt die Zeichentabelle unter der jeweiligen Formel.

1 Stoffgrößen des Fluids

Vier Größen genügen für die meisten Aufgaben: Dichte, Kompressibilität, Zähigkeit und Temperatur. Bei Gasen hängen die ersten beiden so stark vom Zustand ab, dass sie berechnet werden müssen.

1.1 Kompressibilität

Kompressibilität ist die relative Volumenänderung je Druckänderung. Flüssigkeiten und Gase unterscheiden sich darin um Größenordnungen.

$$\frac{\Delta p}{E_{Fl}} = -\frac{\Delta V}{V_0} \qquad \text{mit} \qquad K = \frac{1}{E_{Fl}} \tag{1.1}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
Δp	Druckänderung	Pa
ΔV	Volumenänderung	m^3
V_0	Ausgangsvolumen	m^3
E_{Fl}	Kompressionsmodul der Flüssigkeit	Pa
K	Kompressibilität	Pa^{-1}

Beim Gas tritt an die Stelle des Kompressionsmoduls der Ausgangsdruck selbst, solange die Temperatur gleich bleibt: ein Gas ist isotherm so steif wie der Druck, unter dem es steht. Bei schneller, isentroper Verdichtung, etwa in einer Schallwelle, ist es $\kappa \cdot p_0$ (Abschnitt 2.3).

$$\frac{\Delta p}{p_0} = -\frac{\Delta V}{V_0} \qquad \text{also} \qquad E_{Gas} = p_0 \tag{1.2}$$

Im Normzustand ist E_{Gas} = 1,01325 bar. Das Minuszeichen hält fest, dass steigender Druck das Volumen verkleinert.

1.2 Allgemeine Gasgleichung

Sie verbindet Druck, Volumen und Temperatur. Jede Umrechnung eines Betriebsvolumenstroms auf Bezugsbedingungen läuft über sie.

$$p \cdot V = m \cdot R_i \cdot T \tag{1.3}$$

$$p \cdot v = R_i \cdot T \qquad \text{mit} \qquad v = \frac{1}{\rho}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
p	Absolutdruck	Pa
V	Volumen	m^3
m	Masse des Gases	kg
R_i	spezielle Gaskonstante; trockene Luft 287,05	$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$
T	absolute Temperatur	K
ρ	Dichte	$kg\,m^{-3}$
v	spezifisches Volumen	$m^3\,kg^{-1}$

WARUM DIE BEZUGSBEDINGUNG DAZUGEHÖRT

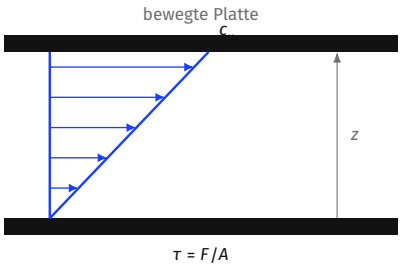
Dasselbe Gas füllt bei 20 °C rund 7 % mehr Raum als bei 0 °C. Ein Volumenstrom braucht deshalb die Angabe von Druck und Temperatur. Unsere Datenblätter führen die Bezugsbedingung als eigene Zeile – beim kapillaren Prüfleck der KL-Serie wahlweise 1000 mbar, 20 °C und 0 % r. F. oder 1013,25 mbar, 0 °C und 0 % r. F. Welche Bedingung gilt, steht im Datenblatt des jeweiligen Geräts.

Die zweite ist der *Normzustand* der Physik – 0 °C und 1013,25 mbar. Wer die beiden verwechselt, liegt um knapp 9 % daneben.

2 Viskosität und Schallgeschwindigkeit

Viskosität ist der innere Widerstand eines Fluids gegen Formänderung. Sie trennt laminare von turbulenter Strömung und trägt damit das Laminar Flow Element.

2.1 Dynamische und kinematische Viskosität



Schichtenströmung zwischen einer ruhenden und einer bewegten Platte. Das Geschwindigkeitsprofil ist linear, die Schubspannung über dem Spalt konstant.

$$\eta = \frac{\tau}{\mathrm{d}c_x/\mathrm{d}z} \qquad \nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{2.1}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
η	dynamische Viskosität	Pa s
ν	kinematische Viskosität	$m^2\,s^{-1}$
τ	Schubspannung, $\tau = F/A$	Pa
F	Reibungskraft	N
A	Berührfläche der Schichten	m^2
$\mathrm{d}c_x/\mathrm{d}z$	Schergefälle quer zur Strömung	s^{-1}

Die kinematische Viskosität ist die dynamische, bezogen auf die Dichte. In dieser Form steht sie in der Reynoldszahl.

2.2 Newtonsches Reibungsgesetz

Ein Fluid heißt newtonsch, wenn die Schubspannung dem Schergefälle proportional ist. Luft und die technischen Gase sind es in guter Näherung.

$$\tau = \eta \cdot D = \eta \cdot \frac{\Delta c_x}{\Delta z} \tag{2.2}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
D	Schergefälle	s^{-1}

2.3 Schallgeschwindigkeit

Sie ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine Druckstörung im Fluid ausbreitet, und die Grenze, an der eine Düse sperrt. In Flüssigkeiten folgt sie aus dem Kompressionsmodul, in Gasen aus Temperatur und Isentropenexponent. Der Druck geht nicht ein.

$$a = \sqrt{\frac{E_{Fl}}{\rho_0}} \qquad a = \sqrt{\kappa \cdot R_i \cdot T} \tag{2.3}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
a	Schallgeschwindigkeit	$m\,s^{-1}$
κ	Isentropenexponent; Luft ≈ 1,4	–
ρ_0	Dichte im Ausgangszustand	$kg\,m^{-3}$

WO DIE SCHALLGESCHWINDIGKEIT DIE MESSUNG BEGRENZT

Erreicht ein Gas im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit, steigert ein weiter abgesenkter Gegendruck den Massenstrom nicht mehr. Die kritische Düse nutzt diesen Effekt als Normal; für jedes andere Wirkdruckgerät begrenzt er den Betriebsbereich nach oben. In Luft von 20 °C liegt die Schallgeschwindigkeit bei 343 m/s.

3 Fluidstatik

Im ruhenden Fluid gibt es keine Schubspannung. Es bleibt der Druck, und der hängt allein von der Höhe ab. Auf dieser Beziehung beruht die Druckmessung mit der Flüssigkeitssäule.

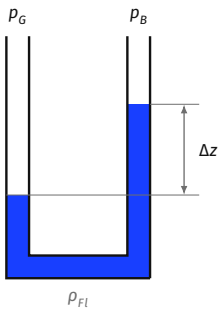
3.1 Druckverteilung in Flüssigkeiten

$$p(z) = p_0 - \rho \cdot g \cdot z \qquad p(z) = p_B + \rho \cdot g \cdot |z| \tag{3.1}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
p_0	Druck am Ursprung der z-Achse	Pa
p_B	barometrischer Druck an der Oberfläche	Pa
z	Höhenkoordinate	m
g	Fallbeschleunigung, 9,81	$\mathrm{m\,s^{-2}}$

Die linke Form zählt z vom Boden nach oben, die rechte von der Oberfläche nach unten. Es gilt die Form, die zum gewählten Koordinatensystem passt.

3.2 U-Rohr-Manometer



Die Höhendifferenz der Flüssigkeitssäule ist das Messsignal. Sie hängt nur von der Dichte der Sperrflüssigkeit ab, nicht vom Querschnitt der Schenkel.

$$p_G = p_B + \rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta z \tag{3.2}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
p_G	Druck des zu messenden Gases	Pa
ρ_{Fl}	Dichte der Sperrflüssigkeit	kg m^{-3}
Δz	Höhendifferenz beider Säulen	m

VOM U-ROHR ZUM DIFFERENZDRUCKSENSOR

Jede Wirkdruckmessung misst dieselbe Größe wie dieses U-Rohr, mit einem Sensor statt einer Flüssigkeitssäule. Die Differenzdrucksensoren unserer Systeme sind rückführbar kalibriert; die Kette endet bei einem Drucknormal und damit bei einer Höhe und einer Dichte.

3.3 Hydrostatischer Auftrieb

$$F_a = \rho \cdot g \cdot V \tag{3.3}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
F_a	Auftriebskraft	N
ρ	Dichte des umgebenden Fluids	kg m^{-3}
V	verdrängtes Volumen	m^3

V ist der eingetauchte Anteil des Körpers. Beim Wägen in Luft mindert der Auftrieb die angezeigte Masse um 1,2 g je Liter Volumen.

3.4 Barometrische Höhenformel

Sie gibt den Luftdruck über der Höhe bei gleichbleibender Temperatur. Bis 1000 m trägt die Näherung; darüber ist die Schichtung der Atmosphäre zu berücksichtigen.

$$p(z) = p_{b0} \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho_{b0}}{p_{b0}} \cdot g \cdot z\right)} \tag{3.4}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
$p(z)$	Luftdruck in der Höhe z	Pa
p_{b0}	Druck auf Meereshöhe, 101 325	Pa
ρ_{b0}	Luftdichte auf Meereshöhe, 1,225	kg m^{-3}
T_{b0}	Temperatur auf Meereshöhe, 288,15	K

Die drei Werte sind die atmosphärischen Verhältnisse am Boden nach ICAO-Normatmosphäre. Über die Gasgleichung hängen sie zusammen: $\rho_{b0}/p_{b0} = 1/(R_i \cdot T_{b0})$.

3.5 Druckkraft und beschleunigte Behälter

Auf eine gekrümmte Fläche wirkt in einer Koordinatenrichtung so viel Kraft wie auf ihre Projektion in diese Richtung. Daraus folgt die Kesselformel.

$$F_z = p \cdot A_{proj} \qquad F_W = \sigma_{zul} \cdot s \cdot L \tag{3.5}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
F_z	Druckkraft auf die Projektionsfläche	N
F_W	Kraft, die ein Wandschnitt aufnimmt	N
A_{proj}	Projektionsfläche des Elements	m^2
σ_{zul}	zulässige Spannung der Wandung	Pa
s	Wandstärke	m
L	Länge des Behälters	m

Für ein Rohr mit dem Innendurchmesser d ist $A_{proj} = d \cdot L$, und die Druckkraft verteilt sich auf zwei Wandschnitte: $F_z = 2\,F_W$. Daraus folgt die erforderliche Wandstärke $s = p \cdot d / (2\,\sigma_{zul})$.

Wird ein offener Behälter waagerecht beschleunigt, stellt sich die Oberfläche schräg; rotiert er, wird sie zum Paraboloid.

$$\tan\alpha = \frac{a}{g} \qquad z = \frac{\omega^2}{2g} \cdot r^2 + Z_s \tag{3.6}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
a	Beschleunigung des Behälters	$m\,s^{-2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	s^{-1}
Z_s	Scheitelhöhe, tiefster Flüssigkeitsstand	m
r	Radius, von der Drehachse aus	m

Aus der Volumengleichheit zwischen Ruhe und Drehung folgt, dass die Flüssigkeit an der Wand eines Behälters mit dem Radius R um denselben Betrag h_1 steigt, um den sie in der Mitte fällt (h_2): $h_1 = h_2 = \omega^2 R^2 / (4g)$.

4 Kontinuität und Bernoulli

Zwei Sätze tragen die stationäre Strömungsrechnung: die Kontinuitätsgleichung für die Masse, die Bernoulli-Gleichung für die Energie.

4.1 Volumen- und Massenstrom

$$\dot{V} = A \cdot \bar{c} \qquad \dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \tag{4.1}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
$\dot{V}$	Volumenstrom	$\mathrm{m^3\,s^{-1}}$
$\dot{m}$	Massenstrom	$\mathrm{kg\,s^{-1}}$
A	durchströmte Querschnittsfläche	$\mathrm{m^2}$
$\bar{c}$	mittlere Geschwindigkeit über dem Querschnitt	$\mathrm{m\,s^{-1}}$

Bei ungleichmäßiger Geschwindigkeit über dem Querschnitt wird integriert. Für den Kreisquerschnitt genügt die eindimensionale Form.

$$\dot{V} = \int_A c(r)\,\mathrm{d}A = 2\pi \int_0^R c(r) \cdot r\,\mathrm{d}r$$

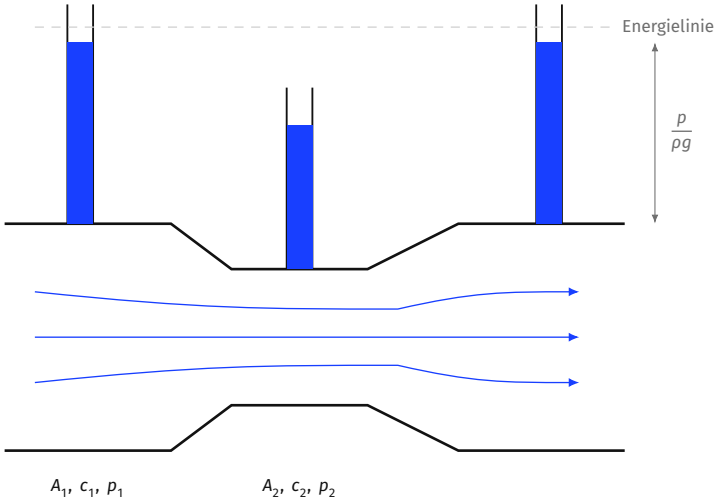
4.2 Kontinuitätsgleichung

$$\sum_i \dot{m}_i = 0 \qquad \text{also} \qquad \rho_1 c_1 A_1 = \rho_2 c_2 A_2 \tag{4.2}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \iff c_1 A_1 = c_2 A_2 \qquad \text{(inkompressibel)}$$

Die einfache Form gilt, solange sich die Dichte nicht ändert. Bei Gasen trägt sie bis etwa 5 % Druckänderung; darüber ist mit Dichten zu rechnen.

4.3 Bernoulli-Gleichung ohne Verluste



An der Verengung steigt die Geschwindigkeit und fällt der statische Druck. Die Summe aus statischer Druckhöhe, geodätischer Höhe und Geschwindigkeitshöhe bleibt gleich: die Energielinie.

Drei Schreibweisen derselben Aussage. Die Wahl richtet sich nach der Einheit des Ergebnisses: spezifische Energie, Druck oder Höhe.

$$\frac{p}{\rho} + g \cdot z + \frac{c^2}{2} = \text{const.} \tag{4.3}$$

$$p + \rho \cdot g \cdot z + \frac{\rho}{2} \cdot c^2 = \text{const.} \tag{4.4}$$

$$\frac{p}{\rho \cdot g} + z + \frac{c^2}{2g} = \text{const.} \tag{4.5}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
p	statischer Druck	Pa
$\rho g z$	geodätischer Druck	Pa
$\frac{\rho}{2} c^2$	dynamischer Druck (Staudruck)	Pa
z	geodätische Höhe	m

4.4 Bernoulli-Gleichung mit Verlusten

Reale Strömungen verlieren Energie an Reibung und Wirbelbildung. Der Verlustterm steht auf der Seite des zweiten Punktes: dort ist er bereits verbraucht.

$$\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{c_2^2}{2} + Y_{V_{1-2}} \tag{4.6}$$

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + p_{V_{1-2}} \tag{4.7}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
$Y_{V_{1-2}}$	spezifische Verlustenergie	J kg^{-1}
$p_{V_{1-2}}$	Druckverlust	Pa
$H_{V_{1-2}}$	Verlusthöhe	m

Die drei Verlustgrößen sind dieselbe Größe in drei Einheiten: $Y_V = p_V/\rho = H_V \cdot g$.

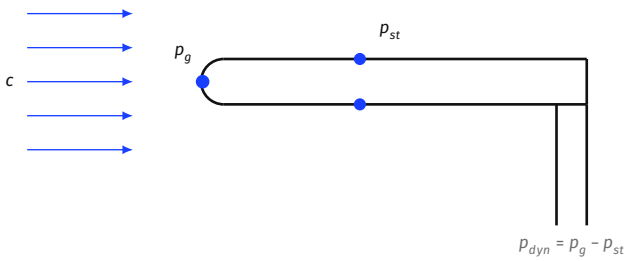
GÜLTIGKEIT DER BERNOULLI-GLEICHUNG

Streng gilt die Bernoulli-Gleichung nur entlang *einer* Stromlinie bei stationärer Strömung eines reibungsfreien Fluids mit gleichbleibender Dichte; bei Gasen trägt sie wie die Kontinuitätsgleichung bis etwa 5 % Druckänderung. Über den ganzen Querschnitt gilt sie erst, wenn die Stromlinien parallel laufen und die Geschwindigkeit gleichmäßig verteilt ist.

Daher die Einlaufstrecken in DIN EN ISO 5167. Ein Krümmer vor der Messstelle stört das Geschwindigkeitsprofil und verletzt damit die Voraussetzung der Auswertung. Das klassische Venturirohr kommt nach DIN EN ISO 5167-4 mit den kürzesten Einlaufstrecken aus, je nach Einbauteil und Durchmesserverhältnis ab 2,5 × *D*.

5 Folgerungen aus der Bernoulli-Gleichung

5.1 Prandtl-Staurohr



Die Bohrung an der Spitze nimmt den Gesamtdruck auf, die Mantelbohrungen den statischen. Ihre Differenz ist der dynamische Druck.

Am Staupunkt kommt die Strömung zur Ruhe. Die Geschwindigkeitsenergie wird dabei vollständig in Druck umgesetzt.

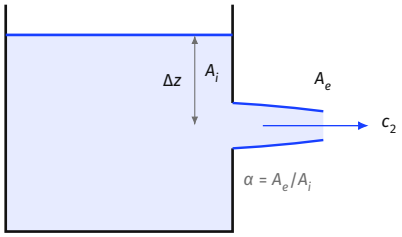
$$p_g = p_{st} + p_{dyn} \qquad \text{mit} \qquad p_{dyn} = \frac{\rho}{2} \cdot c^2 \tag{5.1}$$

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_g - p_{st})}{\rho}}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
p_g	Gesamtdruck	Pa
p_{st}	statischer Druck	Pa
p_{dyn}	dynamischer Druck	Pa

Die Dichte steht unter der Wurzel. Eine angenommene statt gemessene Dichte trägt ihren Fehler zur Hälfte in das Ergebnis; bei Gasen ist das der größte Einzelbeitrag zur Messunsicherheit.

5.2 Ausflussgleichung nach Torricelli



Der austretende Strahl ist enger als die Öffnung. Das Verhältnis beider Flächen ist die Kontraktionszahl.

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot (g \cdot \Delta z - Y_{V_{1-2}})} \tag{5.2}$$

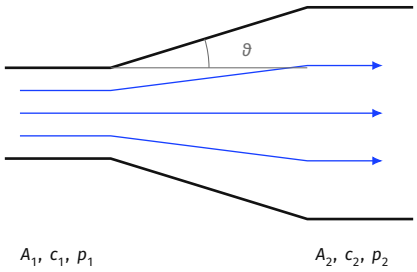
$$\alpha = \frac{A_e}{A_i} \tag{5.3}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
Δz	Höhendifferenz zwischen Spiegel und Öffnung	m
α	Kontraktionszahl	–
A_e	Querschnitt des Strahls	m^2
A_i	Querschnitt der Öffnung	m^2

FORM DER ÖFFNUNG	α
scharfkantiges Loch, kreisförmig	0,58
scharfkantiges Loch, rechteckig	0,61
Bordamündung, scharfkantig	0,50
abgerundete Düse	≈ 1

Gilt für einen Behälterquerschnitt, der groß genug ist, um die Absinkgeschwindigkeit des Spiegels zu vernachlässigen.

5.3 Diffusor und Konfusor



Der Diffusor verzögert die Strömung und gewinnt statischen Druck zurück. Bei zu großem Öffnungswinkel löst die Strömung ab und der Gewinn bleibt aus.

$$p_2' = p_1 + \rho \cdot \frac{c_1^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] \tag{5.4}$$

$$\eta_D = \frac{p_2 - p_1}{p_2' - p_1} \tag{5.5}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
p_2'	theoretischer Druck ohne Verluste	Pa
p_2	tatsächlicher Druck nach dem Diffusor	Pa
η_D	Diffusorwirkungsgrad	–

Ein Diffusor mit kleinem Öffnungswinkel erreicht $\eta_D \approx 0{,}95$. Der Druckverlust beträgt dann $p_V = (1 - \eta_D) \cdot \frac{\rho}{2} c_1^2 \left[1 - (A_1/A_2)^2\right]$.

DER DIFFUSOR ENTSCHEIDET ÜBER DEN DRUCKVERLUST

Venturirohr und Venturidüse haben einen Diffusor, die Blende nicht. Daran hängt der bleibende Druckverlust: die Venturidüse DV700 gibt 10 bis 15 % vom Wirkdruck ab, die Blendenmessstrecke MBL500 30 bis 80 %. Im Dauerbetrieb ist das eine Frage der Betriebskosten.

5.4 Druckänderung quer zur Stromlinie

Auf einer gekrümmten Bahn braucht das Fluid eine Zentripetalkraft; sie kommt aus einem Druckgefälle quer zur Strömung. Eine Messstelle für statischen Druck gehört deshalb nicht hinter einen Krümmer.

$$\mathrm{d}p_n = \rho \cdot \frac{\bar{c}^{\,2}}{r} \cdot \mathrm{d}n \tag{5.6}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
$\mathrm{d}p_n$	Druckänderung quer zur Strömung	Pa
$\mathrm{d}n$	Wegelement quer zur Stromlinie, vom Krümmungsmittelpunkt nach außen gezählt	m
r	mittlerer Krümmungsradius	m

Im geraden, durchströmten Querschnitt ist der statische Druck über der Fläche konstant, auch bei abgelöster Strömung und ungleicher Geschwindigkeitsverteilung. Erst die Krümmung ändert das.

6 Impulssatz

Der Impulssatz liefert die Kraft, die ein strömendes Fluid auf das durchströmte Bauteil ausübt. Er braucht dazu nur Ein- und Austritt, keine Annahme über die Vorgänge im Inneren.

$$\sum_i \vec{F}_{Ii} = \dot{m} \cdot \left(\vec{c}_1 - \vec{c}_2\right) \tag{6.1}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
$\vec{F}_{Ii}$	Impulskraft	N
$\vec{c}_1$	Geschwindigkeit im Eintritt	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
$\vec{c}_2$	Geschwindigkeit im Austritt	$\mathrm{m\,s^{-1}}$

Eine Vektorgleichung; die Vorzeichen folgen dem gewählten Koordinatensystem. Druck- und Impulskräfte zeigen immer in den Kontrollraum hinein. Bei mehreren Ein- oder Austritten tritt an die Stelle von $\dot{m} \cdot \vec{c}$ die Summe der $\dot{m}_i \cdot \vec{c}_i$.

Im stationären Fall halten sich Impulskräfte und äußere Kräfte $\vec{F}_{Sk}$ auf den Kontrollraum die Waage. In dieser Form werden Haltekräfte an Rohrbogen und Prüfaufnahmen berechnet.

$$\dot{m} \cdot \left(\vec{c}_2 - \vec{c}_1\right) = \sum_k \vec{F}_{Sk} \tag{6.2}$$

Trifft ein Freistrahl schräg auf eine feste Wand, teilt er sich. Kraft und Aufteilung folgen aus Impuls- und Kontinuitätssatz.

$$F_W = \rho \cdot A_D \cdot c_D^2 \cdot \sin\delta \tag{6.3}$$

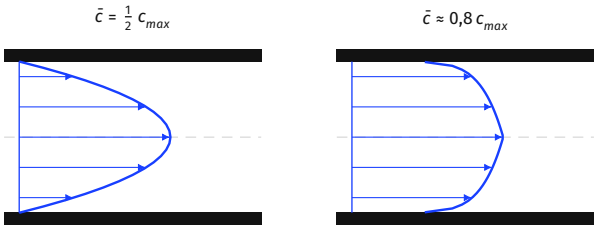
$$\dot{V}_2 = \frac{1}{2}\dot{V}_1(1 - \cos\delta) \qquad \dot{V}_3 = \frac{1}{2}\dot{V}_1(1 + \cos\delta)$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
F_W	Kraft des Strahls auf die Wand, senkrecht zu ihr	N
A_D	Querschnitt des Strahls	m^2
c_D	Geschwindigkeit des Strahls	$m\,s^{-1}$
δ	Winkel zwischen Strahl und Wand	°
$\dot{V}_1$	Volumenstrom des Strahls	$m^3\,s^{-1}$
$\dot{V}_2$	Teilstrom längs der Wand, gegen die Strahlrichtung	$m^3\,s^{-1}$
$\dot{V}_3$	Teilstrom längs der Wand, in Strahlrichtung	$m^3\,s^{-1}$

Bei $\delta = 90°$ teilt sich der Strahl zu gleichen Teilen: $\dot{V}_2 = \dot{V}_3 = \frac{1}{2}\dot{V}_1$.

7 Rohrströmung

7.1 Reynoldszahl



Links das parabolische Profil der laminaren, rechts das völligere der turbulenten Strömung. Das Verhältnis von mittlerer zu maximaler Geschwindigkeit steigt dabei von 0,5 auf rund 0,8.

Die Reynoldszahl ist das dimensionslose Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften. Sie entscheidet, ob eine Strömung laminar bleibt.

$$\mathrm{Re} = \bar{c} \cdot \frac{D}{\nu} \qquad \mathrm{Re} = c_{\infty} \cdot \frac{L}{\nu} \tag{7.1}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
Re	Reynoldszahl	–
D	Rohrdurchmesser	m
L	charakteristische Länge (Platte, Flügeltiefe)	m
c_{∞}	Anströmgeschwindigkeit	$\mathrm{m\,s^{-1}}$

Re < 2320	laminare Strömung – geordnete Schichten, kein Queraustausch
Re > 2320	turbulente Strömung – Queraustausch, völligeres Profil, höherer Verlust

DAS LAMINAR FLOW ELEMENT HÄLT REYNOLDS KLEIN

Ein Laminar Flow Element teilt den Gesamtstrom auf viele enge Kanäle auf. Damit bleibt die Reynoldszahl in jedem Einzelkanal unter der Umschlagzahl, die Strömung bleibt laminar, und es gilt das Gesetz von Hagen-Poiseuille: der Volumenstrom ist dem Differenzdruck *proportional*; an Blende und Düse wächst er nur mit dessen Wurzel. Daher die große Messspanne dieser Geräte – die S-Serie erreicht mit den Glaskapillaren des S010 bis 1:50 und mit Edelstahlmatrix 1:20, die R-Serie 1:10 und im Sonderfall bis 1:30.

Der Preis dieser Linearität ist die Viskositätsabhängigkeit: in der Hagen-Poiseuille-Beziehung steht η im Nenner, und η hängt an Gasart und Temperatur. Unsere Auswertung rechnet Dichte, Viskosität und Reynoldszahl deshalb mit.

7.2 Laminare Rohrströmung

Bei Re < 2320 ist das Geschwindigkeitsprofil eine Parabel und die mittlere Geschwindigkeit die Hälfte der maximalen. Für diesen Fall gibt das Gesetz von Hagen-Poiseuille den Volumenstrom geschlossen an.

$$c(r) = \frac{\Delta p}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \tag{7.2}$$

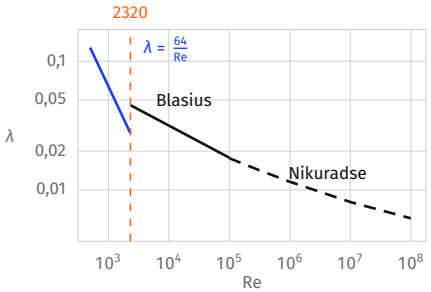
$$c_{max} = \frac{\Delta p}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^2 \qquad \bar{c} = \frac{1}{2} \cdot c_{max}$$

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot L} \tag{7.3}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
Δp	statische Druckdifferenz über der Länge L	Pa
L	Länge des Rohrstücks	m
R	Innenradius des Rohrs	m
r	Laufvariable über den Querschnitt	m

Der Radius geht in der vierten Potenz ein: 10 % weniger Radius ergeben 35 % weniger Volumenstrom. Bei einem kapillaren Prüfleck bestimmt deshalb die Fertigungstoleranz des Durchmessers die Leckrate.

7.3 Rohrreibungszahl



Die Rohrreibungszahl über der Reynoldszahl, doppellogarithmisch. Bei 2320 springt sie: der Übergang von der laminaren Geraden auf das turbulente Gesetz ist unstetig.

Der Druckverlust einer Rohrstrecke folgt aus der Rohrreibungszahl. Im laminaren Gebiet hängt sie allein von der Reynoldszahl ab, im turbulenten zusätzlich von der Wandrauigkeit.

$$Y_V = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \qquad \zeta = \lambda \cdot \frac{L}{D} \tag{7.4}$$

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad (\mathrm{Re} < 2320) \tag{7.5}$$

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}} \qquad (2320 < \mathrm{Re} < 10^5) \tag{7.6}$$

$$\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221 \cdot \mathrm{Re}^{-0{,}237} \qquad (10^5 < \mathrm{Re} < 10^8) \tag{7.7}$$

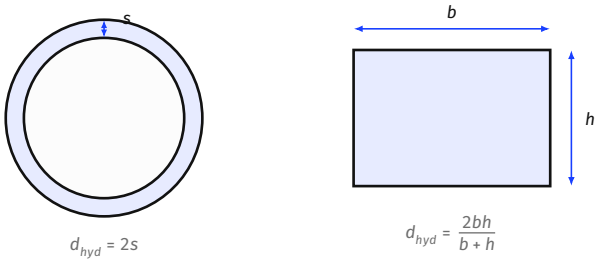
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log\left(\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8 \qquad (\mathrm{Re} > 2320) \tag{7.8}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
λ	Rohrreibungszahl	–
ζ	Rohrverlustziffer der Strecke	–
k_s	äquivalente Sandrauigkeit der Wand	m

GÜLTIGKEITSBEREICH	GESETZ
$\mathrm{Re} < 2320$	$\lambda = 64/\mathrm{Re}$ – exakt, aus Hagen-Poiseuille hergeleitet
$2320 < \mathrm{Re} < 10^5$, **glatt**	Blasius
$10^5 < \mathrm{Re} < 10^8$, **glatt**	Nikuradse
$\mathrm{Re} > 2320$, **glatt, universell**	Prandtl-Kármán, iterativ zu lösen
$25 < \frac{k_s}{D}\mathrm{Re}^{0{,}875} < 350$	Mischgebiet, Prandtl-Colebrook, iterativ zu lösen: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2{,}51}{\sqrt{\lambda}\cdot\mathrm{Re}} + 0{,}27\frac{k_s}{D}\right)$
$\frac{k_s}{D}\mathrm{Re}^{0{,}875} \geq 350$	raues Verhalten: $\lambda = \left[1{,}14 - 2\log\frac{k_s}{D}\right]^{-2}$ – unabhängig von Re

Im Kreisring gilt statt Blasius $\lambda = 0{,}2236/\sqrt[4]{\mathrm{Re}}$. Die Schubspannung an der Rohrwand beträgt $\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot \bar{c}^2$.

7.4 Hydraulischer Durchmesser



Bei unrundem Querschnitt tritt der hydraulische Durchmesser an die Stelle des Rohrdurchmessers. Maßgebend ist der benetzte Umfang; beim Ringspalt zählt er innen und außen.

$$d_{hyd} = \frac{4 \cdot A_{UR}}{U_{ges}} \tag{7.9}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
A_{UR}	durchströmte Fläche des unrunden Profils	m^2
U_{ges}	benetzter Umfang, gegebenenfalls innen und außen	m

QUERSCHNITT	HYDRAULISCHER DURCHMESSER
Ringspalt der Spaltweite s	$2s$
geschlossener Rechteckkanal $b \times h$	$\frac{2bh}{b+h}$
freier (offener) Rechteckkanal	$\frac{2bh}{h+0{,}5\,b}$

8 Druckverluste an Einbauteilen

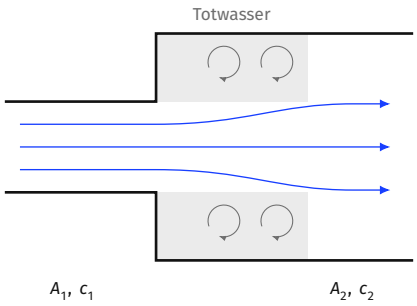
Jedes Formstück kostet Energie. Die Verlustziffer ζ gibt die Energie an, die dabei in Wärme übergeht, bezogen auf die kinetische Energie $c^2/2$.

$$Y_{V_{1\text{-}2}} = \zeta \cdot \frac{c^2}{2} \tag{8.1}$$

ZEICHEN	BEDEUTUNG	EINHEIT
ζ	Verlustziffer	–
c	Bezugsgeschwindigkeit – *welche*, gehört zur Angabe	$m\,s^{-1}$

Eine Verlustziffer gilt nur zusammen mit ihrer Bezugsgeschwindigkeit. Bei einer Querschnittsänderung unterscheiden sich die Werte für c_1 und c_2 um das Quadrat des Flächenverhältnisses.

8.1 Plötzliche Erweiterung



Hinter der Stufe löst die Strömung ab. Der Verlust entsteht in den Wirbeln des Totwassers.

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \qquad \zeta_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \tag{8.2}$$

ζ_1 bezieht sich auf c_1, ζ_2 auf c_2. Im Grenzfall $A_1 \ll A_2$ – dem Austritt in einen großen Raum – wird $\zeta_{Aus} = 1$: die gesamte kinetische Energie geht verloren.

8.2 Plötzliche Verengung

Der Verlust entsteht durch Einschnürung und Wiederaufweitung hinter der Kante. Deshalb steht die Kontraktionszahl in der Formel.

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \cdot \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \qquad \zeta_2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \tag{8.3}$$

Im Grenzfall $A_1 \gg A_2$ – dem Eintritt aus einem großen Raum – ist $\alpha = 0{,}58$ und damit $\zeta_{Ein} = 0{,}52 \approx 0{,}5$. Genau ist $\alpha = A_3/A_2$ mit A_3 als engstem Strahlquerschnitt; da A_3 nicht zugänglich ist, wird α experimentell über A_2/A_1 bestimmt.

DRUCKABFALL ALS MESSGRÖßE

In der Dichtheitsprüfung ist der Druckabfall das Messsignal. Er hat zwei Ursachen: Leckage und thermische Effekte aus der Kompressionswärme des Füllvorgangs. Beruhigungszeit und Referenzvolumen trennen sie.

9 Einheiten, Konstanten, Umrechnungen

GRÖßE	UMRECHNUNG
Druck	1 bar = 10^5 Pa = 10^5 N/m^2 = 0,1 N/mm^2; 1 mbar = 100 Pa
Kraft	1 N = 1 kg · m · s^{-2}
Energie, Arbeit	1 J = 1 N · m = 1 kg · m^2 · s^{-2} = 1 W · s
Leistung	1 W = 1 J · s^{-1} = 1 N · m · s^{-1}
Beschleunigung	1 m · s^{-2} = 1 N · kg^{-1}
Volumenstrom	1 m^3/h = 16,$\overline{6}$ L/min = 277,$\overline{7}$ cm^3/s
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = 2\pi n$; als Zahlenwertgleichung $n = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 60$ in min^{-1} für ω in s^{-1}

Stoffwerte, die in dieser Sammlung vorkommen

GRÖßE	WERT	GILT FÜR
Spezielle Gaskonstante R_i	287,05 J kg^{-1} K^{-1}	trockene Luft, ISO 2533
Isentropenexponent κ	1,4	Luft, zweiatomig
Fallbeschleunigung g	9,81 m s^{-2}	gerundet; Normwert 9,80665
Luftdichte ρ_{b0}	1,225 kg m^{-3}	ICAO, Meereshöhe
Luftdruck p_{b0}	1013,25 mbar	ICAO, Meereshöhe
Temperatur T_{b0}	288,15 K	ICAO, Meereshöhe
Umschlagzahl	Re = 2320	Rohrströmung

Für eine Berechnung mit ausgewiesener Messunsicherheit sind die aktuellen Stoffdaten der jeweiligen Gasart heranzuziehen.

Wo diese Physik bei uns zur Anwendung kommt

Kalibrierlabor

DAkkS- und Werkskalibrierungen für Größen der Gasströmungsmessung, im Labor oder vor Ort. Akkreditiert nach DIN EN ISO/IEC 17025 seit 1999, Registrier-Nr. D-K-17589-01-00.

Die Akkreditierungsurkunde führt drei Gasbereiche: N_2, H_2, CH_4, He und Ar von 10 L/h bis 9 m^3/h, CO von 10 L/h bis 1,5 m^3/h, Propan von 0,5 L/h bis 600 L/h. Die Vor-Ort-Kalibrierung ist ein eigener Abschnitt der Urkunde.

Mess- und Prüftechnik

Sensoren und Systeme für Luft- und Gasströmungen, Druck, Temperatur, Feuchte und Dichtheit – Laminar Flow Elemente, Wirkdruckgeber nach DIN EN ISO 5167, kapillare Prüflecks und komplette Prüfstände.

Engineering

Maßgeschneiderte Prüf- und Messsysteme, gemeinsam entwickelt und in die Fertigung des Kunden integriert.

EINE FRAGE ZUR AUSLEGUNG?

Rufen Sie uns an.

T +49 7157 5387-0 · info@tetratec.de · www.tetratec.de

Zu diesem Dokument

Stand	Version 1.0, 12.11.2026
Texte und Abbildungen	Eigenleistung der TetraTec Instruments GmbH

Die Formeln sind einer Formelsammlung „Technische Strömungslehre“ vom 07.03.2002 entnommen, nachgerechnet und wo nötig berichtigt.

Diese Sammlung ersetzt kein Lehrbuch und keine Auslegungsrechnung. Sie gibt den Stand unserer Kenntnis wieder und dient der Orientierung; eine Haftung für Vollständigkeit und Richtigkeit der Angaben ist damit nicht verbunden. Maßgebend für die Auslegung eines Messaufbaus sind die geltenden Normen und die Daten des eingesetzten Geräts. Für einen konkreten Fall sprechen Sie uns an.